www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1989

MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE
OPTION P'
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHEMATIQUES II - P'.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option P', comporte 6 pages.

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLEME

On désigne par C^2 l'espace vectoriel des fonctions de deux variables réelles x et t, à valeurs complexes, deux fois continûment différentiables sur $\mathbb{R}^2$. Le sous-espace vectoriel de C^2 constitué des fonctions à la fois polynômes en x et polynômes en t est noté $\mathcal{P}$. Etant donnée l'équation aux dérivées partielles,

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

on désigne par E le sous-espace vectoriel de C^2 constitué des solutions de (1) et par F le sous-espace vectoriel de C^2 constitué des solutions polynômiales de (1) (autrement dit $F = E \cap \mathcal{P}$) .

L'objet du problème est d'étudier cet espace vectoriel F .

PARTIE I

L'objectif de cette partie est la construction d'une base de l'espace vectoriel F .

I.1 Expression d'une solution polynôme

Soit P un élément de F que l'on écrit sous la forme

$P(x, t) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\, t^k$ où, pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$,

P_k est un élément de $C[X]$, P_n n'étant pas le polynôme nul.

a) Calculer P_n'' et exprimer P_k'' en fonction de P_{k+1} lorsque l'entier k est strictement inférieur à n .

b) En déduire l'expression de P_k , puis de P en fonction de P_0 . Quel est le degré de P_0 ?

c) Prouver finalement que

$$P(x, t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^{2k} P}{\partial x^{2k}}(x, 0)\, \frac{t^k}{k!} .$$

I.2 Structure de l'espace vectoriel F

a) Prouver que, pour tout élément Π de $C[X]$, la fonction polynôme à deux variables définie par :

$$P_\Pi(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Pi^{(2k)}(x)\, \frac{t^k}{k!} \text{ , appartient à F .}$$

b) On note désormais L l'application linéaire de $C[X]$ dans F définie par $L(\Pi) = P_\Pi$.

Prouver que L est un isomorphisme et expliciter l'isomorphisme réciproque de L .

I.3 Construction d'une base de F

Pour tout entier n positif ou nul, on désigne par U_n l'image par L du polynôme X^n .

a) Prouver que $(U_0, U_1, \ldots, U_k, \ldots)$ est une base de l'espace vectoriel F .

b) Expliciter $U_n(x, t)$.

c) Déterminer le degré de la fonction polynôme $t \mapsto U_n(x, t)$ (On distinguera le cas où n est pair du cas où n est impair).

d) Expression des dérivées partielles de U_n .

Montrer, sans calcul, que pour tout entier n les fonctions $\frac{\partial U_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial U_n}{\partial t}$ sont encore des éléments de F et exprimer $\frac{\partial U_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial U_n}{\partial t}$ dans la base $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

PARTIE II

Dans cette partie, on construit une famille de fonctions $(x, t) \mapsto f_\alpha(x, t)$, solutions de l'équation (1), où α parcourt $\mathbb{C}$.

On exprime ensuite les polynômes U_n étudiés dans la partie I, à l'aide de ces solutions f_α .

II.1 Stabilité de E par dérivation par rapport à un paramètre

Soit $(\lambda, x, t) \mapsto f_\lambda(x, t)$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$. Pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout réel λ, on pose :

$$f_\lambda^{(n)}(x, t) = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f_\lambda(x, t) .$$

Prouver que, si pour tout nombre réel λ, l'application qui à (x, t) associe $f_\lambda(x, t)$ est une solution de (1), alors, pour tout entier n et pour tout nombre réel λ, la fonction $f_\lambda^{(n)}$ est aussi une solution de (1) .

II.2 Recherche de solutions de (1) sous forme de produit

Soit g un élément non nul de C^2 de la forme $g(x, t) = \varphi(x)\,\psi(t)$ où φ et ψ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que g est un élément de E si et seulement si existe un nombre complexe α tel que

$$\varphi'' = \alpha^2 \varphi$$

$$\text{et } \psi' = \alpha^2 \psi .$$

b) En déduire la forme générale des solutions g de la forme précédente. (On distinguera le cas $\alpha = 0$ et le cas $\alpha \neq 0$.)

II.3 Génération des polynômes U_n

On note désormais F la fonction définie sur $\mathbb{C}^3$ par :

$$F(\alpha, u, v) = \exp(\alpha u + \alpha^2 v) .$$

a) Soit (u, v) un élément donné de $\mathbb{C}^2$; prouver que la fonction qui à tout nombre complexe α associe $F(\alpha, u, v)$ est la somme d'une série entière dans $\mathbb{C}$ sous la forme

$$(2) \qquad F(\alpha, u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(u, v)\, \frac{\alpha^n}{n!}$$

où V_n est, quel que soit l'entier n, un élément de $\mathcal{P}$.

b) Pour tout λ réel, on note f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_\lambda(x, t) = F(\lambda, x, t) .$$

Exprimer $V_n(x, t)$ à l'aide de $f_\lambda^{(n)}$ (notations de II.1) et en déduire que la fonction, qui à tout élément (x, t) de $\mathbb{R}^2$ associe $V_n(x, t)$, appartient à F .

c) En utilisant la formule (2) lorsque les variables sont réelles, calculer $V_n(x, 0)$ et en déduire que pour tout (x, t) de $\mathbb{R}^2$, $V_n(x, t) = U_n(x, t)$.

II.4 Relations de récurrence

a) Calculer $f_\lambda^{(1)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial \lambda}(f_\lambda(x, t))$ et prouver que, pour tout entier n supérieur ou égal à deux,

$$(3) \qquad f_\lambda^{(n)}(x, t) = (x + 2\lambda t)\, f_\lambda^{(n-1)}(x, t) + 2t(n-1)\, f_\lambda^{(n-2)}(x, t)$$

(On observera que $\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f_\lambda = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \lambda^{n-1}} f_\lambda^{(1)}$.)

b) En déduire que les polynômes U_n satisfont, pour tout couple (x, t) de $\mathbb{R}^2$ aux relations

$$U_0(x, t) = 1 ,$$

$$U_1(x, t) = x$$

et, pour tout entier n supérieur ou égal à un,

$$(4) \qquad U_{n+1}(x, t) = xU_n(x, t) + 2ntU_{n-1}(x, t) .$$

II.5 Expression des dérivées partielles

a) Soient a et b des nombres réels strictement positifs. Montrer que, pour tout élément (y, s) de $\mathbb{R}^2$ tel que $|y| \leqslant a$ et $|s| \leqslant b$,

$$|U_n(y, s)| \leqslant U_n(a, b) .$$

b) Soit x un nombre réel strictement positif. Montrer qu'on peut intégrer terme à terme par rapport à y sur le segment $[0, x]$ la série de terme général $x_n(y)$ où

$$x_n(y) = U_n(y, t)\, \frac{\lambda^n}{n!} .$$

Retrouver ainsi l'expression de $\frac{\partial U_n}{\partial x}$ (cf. I.3 d) .

c) Retrouver de même l'expression de $\frac{\partial U_n}{\partial t}$.

PARTIE III

Dans cette partie, on établit d'abord que les solutions U_n de l'équation (1) s'expriment à l'aide de polynômes H_n en une seule variable. On montre ensuite que la famille de ces polynômes (H_n) constitue une famille orthogonale sur $\mathbb{R}$, relativement à un certain produit hermitien.

III.1 Génération des polynômes H_n

On désigne par G la fonction définie sur $\mathbb{C}^2$ par

$$G(\beta, w) = F(\beta, 2w, -1)$$

et on note H_n le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $H_n(w) = U_n(2w, -1)$.

a) Calculer en fonction de w et de α la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} H_n(w) \frac{\alpha^n}{n!}$; α est un nombre complexe.

b) Soit λ un réel donné ; on considère la fonction g_λ définie dans $\mathbb{R}^2$ par

$$g_\lambda(x, t) = G\left(\lambda i\sqrt{t}, \frac{x}{2i\sqrt{t}}\right) \quad \text{si} \quad t > 0 \quad , \text{ où } \quad i^2 = -1$$

$$g_\lambda(x, 0) = e^{\lambda x}$$

$$g_\lambda(x, t) = G\left(\lambda\sqrt{-t}, \frac{x}{2\sqrt{-t}}\right) \quad \text{si} \quad t < 0 \ .$$

Comparer g_λ et f_λ et en déduire les relations qui permettent d'exprimer $U_n(x, t)$ à l'aide du polynôme H_n .

III.2 Structure hermitienne sur $\mathbb{C}[X]$ et propriétés des H_n

a) Pour tout couple (Q, R) de polynômes éléments de $\mathbb{C}[X]$, on pose

$$(Q|R) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \overline{Q(x)} R(x) \, dx \ .$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit hermitien sur $\mathbb{C}[X]$.

b) Soit l'application $\mathcal{H}$ qui à tout élément Q de $\mathbb{C}[X]$ fait correspondre la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathcal{H}(Q)(x) = e^{x^2} \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} \frac{d}{dx} Q(x)\right) \ .$$

Montrer que, pour tout couple (Q, R) d'éléments de $\mathbb{C}[X]$, on a la relation $(\mathcal{H}(Q)|R) = (Q|\mathcal{H}(R))$.

c) En utilisant les propriétés des polynômes U_n , prouver les relations

$$(5) \qquad H_n' = 2n \, H_{n-1}$$

$$(6) \qquad H_{n+1} = 2x \, H_n - 2n \, H_{n-1}$$

pour tout entier n strictement positif.

Déduire de ces deux relations que les polynômes H_n sont des vecteurs propres de l'endomorphisme $\mathcal{H}$.

d) Prouver que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue une base orthogonale de $\mathbb{C}[X]$.

On pose $\quad I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (H_n(x))^2 \, dx$.

Prouver que $\quad 2(n + 1) \, I_n = I_{n+1}$

et déduire de ce qui précède une base orthonormale de $\mathbb{C}[X]$.

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

FIN DU PROBLEME

page 110 Concours commun MINES-PONTS-TELECOM-...
1989 3 option P'-Math 2

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail